Complement chapitre 4

page 2 slide 4

Exemple

$\alpha x + \beta y = (0,0) \Rightarrow \alpha(2,1) + \beta(5,2) = (0,0)$

$(2\alpha, \alpha) + (5\beta, 2\beta) = (0,0)$

$(2\alpha + 5\beta, \alpha + 2\beta) = (0,0)$

$\begin{cases} 2\alpha + 5\beta = 0 \\ \alpha + 2\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + 5\beta = 0 \\ 2\alpha + 4\beta = 0 \end{cases} \ominus \Rightarrow \cancel{2\alpha} - \cancel{2\alpha} + 5\beta - 4\beta = 0$

$\Rightarrow \boxed{\beta = 0}$

et $\alpha = 0$

dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \Rightarrow \det(M) = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 2 - 1 \times 5 = 4 - 5 = -1 \neq 0.$$

page 3 slide 6

la matrice associée aux vecteurs $x = (x_1, x_2, x_3)$
$y = (y_1, y_2, y_3)$
$z = (z_1, z_2, z_3)$

est

$$M = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}. \quad \text{ou} \quad M = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix}$$ Crochet

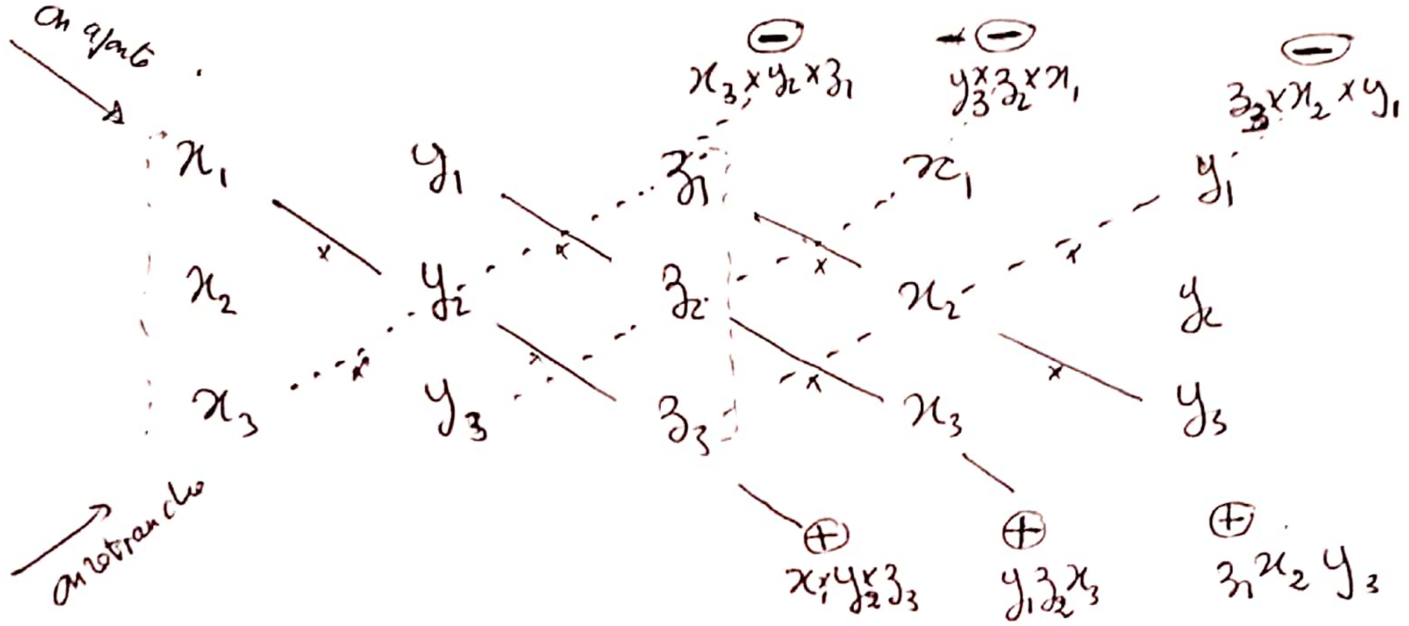
parenthèse ~~paset~~

barre

$$\det_B(x, y, z) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = ?$$

on utilise la methode de Sarrus : c'est une règle pour calculer un determinant d'ordre 3 (determinant 3×3). Elle consiste à ecrire les 3 colonnes du determinant, puis repeter les deux premier

M. ARAD



$$\det_B(x,y,z) = + x_1 y_2 z_3 + y_1 z_2 x_3 + z_1 x_2 y_3 - x_3 y_2 z_1 - y_3 z_2 x_1 - z_3 x_2 y_1$$

$$\det_B(x,y,z) = x_1 y_2 z_3 + y_1 z_2 x_3 + z_1 x_2 y_3 - x_1 y_3 z_2 - y_1 z_3 x_2 - z_1 x_3 y_2.$$

$$= x_1 (y_2 z_3 - y_3 z_2) + y_1 (z_2 x_3 - z_3 x_2) + z_1 (x_2 y_3 - x_3 y_2)$$

$$= x_1 (y_2 z_3 - y_3 z_2) - y_1 (z_3 x_2 - z_2 x_3) + z_1 (x_2 y_3 - x_3 y_2)$$

ex $x = (1, 2, -1)$, $y = (0, 3, 2)$, $z = (5, 4, 0)$

$$\det(x,y,z) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \longrightarrow \det(x,y,z) = \left|\begin{matrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{matrix}$$

$$= (1 \times 3 \times 0) + (0 \times 4 \times (-1)) + (5 \times 2 \times 2) - ((-1) \times 3 \times 5) - (2 \times 4 \times 1) - (0 \times 2 \times 0)$$

$$= 0 + 0 + 20 - (-15) - 8 - 0$$

$$= 27.$$

M. ABID

pag 4-5 slide 7-9

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{bmatrix},$$

on utilise la règle de Sarrus.

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

$$= a(b'c''-b''c') - b(a'c''-a''c') + c(a'b''-a''b').$$

or $b'c''-b''c'$ peut être écrit comme suit

$$b'c''-b''c' = \begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix} \quad \text{de m } a'c''-a''c' = \begin{vmatrix} a' & c' \\ a'' & c'' \end{vmatrix}$$

$$\text{et } a'b''-a''b' = \begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix}$$

c.a.d

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = a\underbrace{\begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix}}_{A_{11}} - b\underbrace{\begin{vmatrix} a' & c' \\ a'' & c'' \end{vmatrix}}_{A_{12}} + c\underbrace{\begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix}}_{A_{13}}.$$

A_{11} st appelé $\boxed{\text{mineur}}$ de la matrice A obtenue la ~~prem~~ 1ière ligne et 1ière colonne

$$\begin{vmatrix} a & \cancel{b} & c \\ a' & \boxed{b' \quad c'} \\ a'' & \boxed{b'' \quad c''} \end{vmatrix} \qquad A_{11} = \begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix} \qquad \text{mineur } A_{11}$$

de m A_{12}, on supprime la 1ière ligne et la 2ie colonne ; mineur A_{12}

A_{13}, " " " 1ier " et la 3ie " ; mineur A_{13}

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \quad A_{12} = \begin{vmatrix} a' & c' \\ a'' & c'' \end{vmatrix} \;;\; \begin{vmatrix} a & b & c \\ \boxed{a' \quad b'} & c' \\ \boxed{a'' \quad b''} & c'' \end{vmatrix} . \quad A_{13} = \begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = (-1)^{1+1} a A_{11} + (-1)^{1+2} b A_{12} + (-1)^{1+3} c A_{13}.$$

M. ABID

pag 5 slide 10

On developpe suivant — ligne ou une colonne qui contient le maximum de <u>zero</u>, pour simplifier le calcul.

Suivant la 1ier colonne (3 operations)

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} . 2 . \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} . 1 . \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+1} . 5 . \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \times 2 - 1 \times (-1) + 5(-6) = 4 + 1 - 30 = -25$$

Suivant la 3ie colonne (2 operations)

$$\begin{vmatrix} 2 & - & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3} . 3 . \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} . 1 . \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \times (-10) + 1 \times 5 = -30 + 5 = -25$$

page 6 slide 11

Attention on doit bien faire la difference entre

* $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = M$ matrice $\qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \det(M) = ad - bc$ determinant un nombre

$\begin{bmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{bmatrix} = \lambda M \qquad \begin{vmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{vmatrix} = \lambda^2 \det(M)$

* on a $\det(\lambda M) \neq \lambda \det(M)$

$\det(\lambda M) = \lambda^2 \det(M)$ // si M est matrice carré d'ordre 2

* $^tM = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$

$\det(^tM) = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \det(M)$

* <u>permutation</u> d'une ligne avec une autre

$\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = bc - ad = - \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

M. ABID

permutation de colonne.

$$\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = bc - ad = - \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

page 7 slide 14

* Pour la propriété 3, vérifions sur des matrices d'ordre 2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$$

$$\det(A \cdot B) = (ae+bg)(cf+dh) - (af+bh)(ce+dg).$$
$$= (ad-bc)(eh-fg).$$
$$= \det A \cdot \det B.$$

* $\det(A^2) = \det(A \cdot A) = \det A \cdot \det A = (\det(A))^2$

page 8 slide 15

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & a & b & c \\ 0 & \lambda_2 & e & f \\ 0 & 0 & \lambda_3 & g \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \underbrace{\begin{vmatrix} \lambda_1 & a & b & c \\ 0 & \lambda_2 & e & f \\ 0 & 0 & \lambda_3 & g \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{vmatrix}}_{\text{on développe suivant la 1ère colonne}} = \lambda_1 \underbrace{\begin{vmatrix} \lambda_2 & e & f \\ 0 & \lambda_3 & g \\ 0 & 0 & \lambda_4 \end{vmatrix}}_{\text{la même chose}} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \begin{vmatrix} \lambda_3 & f \\ 0 & \lambda_4 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4$$

page 8 slide 16

nous avons $\det(AB) = \det(A) \cdot \det B$. et $A \cdot A^{-1} = \mathbb{1}$.

$$\det(A \cdot A^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1}) = \det(\mathbb{1}) = 1.$$

$$\Rightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} \qquad \det(A) \neq 0.$$

Ex. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad \det(A) = -2$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad \det(A^{-1}) = -\frac{1}{2} = \frac{1}{\det(A)}.$

page 9 slide 17.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

*

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1\times5\times(-1) + 4\times1\times3 + 2\times2\times0 - 3\times5\times2 - 0\times1\times1 - (-1)\times2\times4$$

$$= -5 + 12 + 0 - 30 - 0 + 8$$

$$= -15$$

*

$$\begin{array}{c} l_1 \rightarrow \\ l_2 \rightarrow \\ l_3 \rightarrow \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow[l_3 \rightarrow l_3 - 3l_1]{l_2 \rightarrow l_2 - 2l_1} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2-2\times1 & 5-2\times4 & 1-2\times2 \\ 3-3\times1 & 0-3\times4 & -1-3\times2 \end{vmatrix}$$

on substitue la ligne 2 par la ligne 2 - 2 la ligne 1

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -12 & -7 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ -12 & -7 \end{vmatrix} = 21 - 36$$

$$= -15$$

*

$$\det(M) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} \end{array} \xrightarrow[c_3 \rightarrow c_3 - 2c_1]{c_2 \rightarrow c_2 - 4c_1} \begin{vmatrix} 1 & 4-4\times1 & 2-2\times1 \\ 2 & 5-4\times2 & 1-2\times2 \\ 3 & 0-4\times3 & -1-2\times3 \end{vmatrix}$$

$$\det(M) \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -3 \\ 3 & -12 & -7 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ -12 & -7 \end{vmatrix} = -15$$

page 9 slide 18 – 19

Soit

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{Com}(M) = ?$$

1) ~~ABID~~ $\Delta_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$.

$M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -5 \longrightarrow \Delta_{11} = 5$; $M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -5 \longrightarrow \Delta_{12} = 5$

$M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -15 \longrightarrow \Delta_{13} = 15$; $M_{21} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -4 \longrightarrow \Delta_{21} = 4$

$M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -7 \longrightarrow \Delta_{22} = -7$; $M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -12 \longrightarrow \Delta_{23} = 12$

$M_{31} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -6 \longrightarrow \Delta_{31} = -6$; $M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \longrightarrow \Delta_{32} = 3.$

$M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -3 \longrightarrow \Delta_{33} = -3$

$$\mathrm{Com}(M) = \begin{bmatrix} -5 & 5 & -15 \\ 4 & -7 & 12 \\ -6 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

$${}^t\mathrm{Com}(M) = \begin{bmatrix} -5 & 4 & -6 \\ 5 & -7 & 3 \\ -15 & 12 & -3 \end{bmatrix}$$

$\det(M) = -15 \neq 0$

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \, {}^t\mathrm{Com}(M) = \frac{1}{-15} \begin{bmatrix} -5 & 4 & -6 \\ 5 & -7 & 3 \\ -15 & 12 & -3 \end{bmatrix}$$

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{4}{15} & \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{3} & 7/15 & -1/5 \\ 1 & -4/5 & 1/5 \end{bmatrix}$$

Page ~~11~~ : Slide 21-22

Comme on le voit, le rang d'une matrice M est égale au plus grand des déterminants non nuls d'une ~~matrice N extraite de~~ M. matrice carrée N extraite de M.

M. ABID

Si M st de type ~~de~~ (n,p) (n lignes et p colonnes)
Si N st de l'ordre q (q lignes et q colonnes)

alor $q \leq n$ et $q \leq p$ $q \leq \min(n,p)$.

c à d si vous avez matrice de 4 lignes et 6 colonnes
alor le rang max st $\underline{4}$ ~~de~~

Si vous avez un matrice de 3 lignes et 2 colonnes
alor le rang max st $\underline{\underline{2}}$

exemple de matrice extraite d'une manière générale.

$$M\begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 & 9 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \end{pmatrix}. \qquad N_1=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}. \qquad N_2=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

les elements de la matrice N extraite doivent appartenir à la même ligne et à la même colonne de la matrice initiale M; pour chaque ligne et chaque colonne de $\underline{N}$

$$N_3 = \cancel{\begin{pmatrix} 0 & 3 & \boxed{6} \\ 2 & 5 & \boxed{11} \end{pmatrix}}$$

→ c'est pas matrice extraite

6 et 11 $\notin$ pas à la même colonne de M.

$$N_4=\cancel{\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}}$$

0 et 7 $\notin$ pas à la même ligne de M.

Pour trouver le déterminant non nul, d'ordre maximal, on utilisera la méthode de Gauss: qui consiste à obtenir des matrices dites échelonnées (en lignes).

c a d
- Toute ligne non nulle de M commence avec plus de zeros que la ligne précédente;
- en dessous d'une ligne nulle, on ne peut trouver qu'une ligne nulle.

on aura des matrices de type

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & - \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & \\ \vdots & \vdots & & & \end{pmatrix}$$

a_{ii} sont appelés des pivots.

M. ABID

$$l_1 \rightarrow, \; l_2, \; l_3, \; l_4 \quad \text{rg}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ \boxed{-2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \underset{l_3 \leftarrow 2l_1 + l_3}{\text{rg}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2+2\times1 & 1+2\times1 & 0+2\times0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

pivot.

sera remplacé par 0

l_1 ligne 1
l_2 ligne 2
l_3 ligne 3

pour cela on substitue l_3 par $l_3 + 2l_1$

pivot

$$= \text{rg}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{3} & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{l_3 \leftarrow l_3 - \frac{3}{2} l_2 \\ l_4 \leftarrow l_4 - \frac{1}{2} l_2}}{=}$$

remplacé p 0

pivot

$$= \text{rg}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0-\frac{3}{2}0 & 3-\frac{3}{2}2 & 0-\frac{3}{2}1 \\ 0-\frac{1}{2}0 & 1-\frac{1}{2}2 & 1-\frac{1}{2}1 \end{bmatrix} = \text{rg}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\underset{l_4 \leftarrow l_4 + \frac{1}{3} l_3}{=} \text{rg}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

la matrice extraite est matrice d'ordre $\boxed{3}$ dont le determinant est égale à -3

$$\Rightarrow \text{rg}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 3.$$

cad que les 3 vect $(1,0,-2,0)$, $(1,2,1,1)$ et $(0,1,0,1)$ sont linéairement indépendants.

N. ABDID

$c_i \longleftrightarrow c_j$ permuter c_i ~~ave~~ avec c_j

un autre exemple

$l_i \longleftrightarrow l_j$ permuter l_i avec l_j

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

$l_i \leftarrow l_i + \alpha l_j$ remplacer l_i par $l_i + \alpha l_j$

$$rg \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \underset{C_1 \leftrightarrow C_2}{=\!=\!=} rg \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \underset{l_1 \leftrightarrow l_2}{=\!=\!=} rg \begin{bmatrix} 3 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{l_2 \leftrightarrow l_4}{=\!=\!=} rg \begin{bmatrix} 3 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \underset{l_4 \leftarrow l_4 - l_3}{=\!=\!=} rg \begin{bmatrix} 3 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

donc $rg\, M = 4$